

Corrigé

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points :

$$A(1; 1; -4), \quad B(2; -1; -3), \quad C(0; -1; -1) \quad \text{et} \quad \Omega(1; 1; 2).$$

1. Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-1 \\ -3-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur \overrightarrow{AC} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-1 \\ -1-1 \\ -1-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés; ils définissent donc un plan.

2. a. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-1) + 1 \times (-2) + 1 \times 3 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur \vec{n} est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC), donc c'est un vecteur normal au plan (ABC).

- b. Le plan (ABC) a donc une équation cartésienne de la forme $x + y + z + d = 0$. On détermine d en utilisant le fait que le point A appartient au plan (ABC).

$$A \in (ABC) \iff x_A + y_A + z_A + d = 0 \iff 1 + 1 - 4 + d = 0 \iff d = 2$$

Le plan (ABC) a donc pour équation cartésienne $x + y + z + 2 = 0$.

3. a. $x_\Omega + y_\Omega + z_\Omega + 2 = 1 + 1 - 2 + 2 = 2 \neq 0$ donc $\Omega \notin (ABC)$.

- b. Soit H le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (ABC).

Donc $\overrightarrow{\Omega H}$ est un vecteur orthogonal au plan (ABC), donc il est colinéaire au vecteur \vec{n} , et il a donc des coordonnées de la forme $\begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix}$, où $k \in \mathbb{R}$.

$$\text{Les coordonnées de } \overrightarrow{\Omega H} \text{ sont } \begin{pmatrix} x_H - x_\Omega \\ y_H - y_\Omega \\ z_H - z_\Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_H - 1 \\ y_H - 1 \\ z_H - 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On déduit donc que } \begin{cases} x_H - 1 = k \\ y_H - 1 = k \\ z_H - 2 = k \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x_H = 1 + k \\ y_H = 1 + k \\ z_H = 2 + k \end{cases}$$

Or le point H appartient au plan (ABC) donc : $x_H + y_H + z_H + 2 = 0 \iff (1 + k) + (1 + k) + (2 + k) + 2 = 0 \iff 6 + 3k = 0 \iff k = -2$.

Le point H a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-2 \\ 2-2 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On admet que $\Omega H = 2\sqrt{3}$. On définit la sphère S de centre Ω et de rayon $2\sqrt{3}$ comme l'ensemble de tous les points M de l'espace tels que $\Omega M = 2\sqrt{3}$.

4. Le point H est le projeté orthogonal de Ω sur le plan (ABC), donc ΩH est la plus courte distance entre Ω et tout point du plan; autrement dit, tout point N de (ABC) distinct de H est tel que $\Omega N > \Omega H$, donc $\Omega N > 2\sqrt{3}$.

Ce qui prouve que le point N n'appartient pas à la sphère S .

On dit qu'un plan \mathcal{P} est tangent à la sphère S en un point K lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $K \in \mathcal{P} \cap S$
- $(\Omega K) \perp \mathcal{P}$

5. Soit le plan \mathcal{P} d'équation $x + y - z - 6 = 0$ et le point K de coordonnées $K(3; 3; 0)$.

- $x_K + y_K - z_K - 6 = 3 + 3 - 0 - 6 = 0$ donc $K \in \mathcal{P}$
 $\Omega K^2 = (3-1)^2 + (3-1)^2 + (0-2)^2 = 4 + 4 + 4 = 12$ donc $\Omega K = 2\sqrt{3}$; et donc $K \in S$.
 Donc $K \in \mathcal{P} \cap S$.

- Le vecteur $\overrightarrow{\Omega K}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-1 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Le plan \mathcal{P} a pour vecteur normal $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\Omega K} = -2\vec{n}'$; or \vec{n}' est un vecteur normal au plan \mathcal{P} donc $\overrightarrow{\Omega K}$ est orthogonal au plan \mathcal{P} , et donc $(\Omega K) \perp \mathcal{P}$.

On en conclut que le plan \mathcal{P} est tangent à la sphère S au point K .

6. On admet que les plans (ABC) et \mathcal{P} sont sécants selon une droite (Δ) .

Rem. – Le plan (ABC) a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et \mathcal{P} a pour vecteur normal $\vec{n}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ces vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires donc (ABC) et \mathcal{P} sont sécants selon une droite (Δ) .

On résout le système :

$$M(x; y; z) \in (ABC) \cap \mathcal{P} \iff \begin{cases} x+y+z+2=0 \\ x+y-z-6=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x+y+z+2=0 \\ (x+y+z+2)-(x+y-z-6)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z+2=0 \\ z+2+z+6=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z+2=0 \\ z=-4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-2=0 \\ z=-4 \end{cases}$$

On peut l'écrire $\begin{cases} x=2-y \\ y=y \\ z=-4 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=-4 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

La droite (Δ) a donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=-4 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.